解 答 例　2021年度(令和３年度)

数学（専願制・併願制）　11月14日 実施分

●工学部
●情報工学部

1 x^4-13x^2+36を因数分解すると$\boxed{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}$であり，$2x^2+5xy+2y^2+5x+7y+3$を因数分解すると$\boxed{(2x+y+3)(x+2y+1)}$である。

2 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\boxed{3}$であり，$x^2+\dfrac{1}{x^3}=\boxed{2\sqrt{5}}$である。

3 定数aの値の範囲は$\boxed{0}<a<\boxed{1}$である。

4 放物線$y=4x^2+20x+21$をy軸方向に$\boxed{4}$だけ平行移動すると，x軸に接するようになる。
また，放物線$y=4x^2+20x+21$をx軸方向に平行移動して得られる放物線$y=\boxed{4x^2-8x}$は，原点を通り，x軸の正の部分と交わる。

5 $\sin\angle \mathrm{BAC}=\boxed{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$であり，△ABCの内接円の半径は$\boxed{\dfrac{\sqrt{15}}{6}}$である。

6 △ABCの面積が$\sqrt{15}$のとき，$\mathrm{AB}=\boxed{2\sqrt{2}}$であり，△ABCの3辺の長さの和が1のとき，
$\mathrm{AB}=\boxed{\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}}$である。

7 100以上1000以下の整数のうち，3と7の両方で割り切れる数は$\boxed{43}$個あり，
3と7の少なくとも一方で割り切れる数は$\boxed{385}$個ある。

8 正八面体の頂点の数は$\boxed{6}$であり，辺の数は$\boxed{12}$である。

9 360の正の約数は$\boxed{24}$個あり，2700の正の約数は$\boxed{36}$個ある。

10 $\alpha+\beta+\gamma=\boxed{-\dfrac{7}{2}}$あり，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\boxed{\dfrac{21}{4}}$である。

11 $\cos\alpha=\boxed{-\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$，$\sin 2\alpha=\boxed{-\dfrac{3\sqrt{7}}{8}}$である。

12 $x=\boxed{4}$，$y=\boxed{3}$である。

数学（３教科型）	２月９日 実施分

●工学部（電子情報工学科／電気工学科）
●情報工学部（情報工学科／情報通信工学科／システムマネジメント学科）

1

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
$-\dfrac{17}{8}$	2	$12\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	7	3	253	136	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{7\pi}{6}$

2

①	②	③	④	⑤	⑥
t^2-2	$t \geqq 2$	0	2	$\sqrt{t^2-4}$	$\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$

3 (1) $y' = -2x$ より，ℓ の傾きは $-2a$ である。接線 ℓ の接点は，点（a，$-a^2+9$）なので，

その方程式は，$y=-2a(x-a)-a^2+9$，すなわち，$y=-2ax+a^2+9$ である。

したがって，$m=-2a$，$n=a^2+9$ である。

(2) 前問の接線 ℓ と放物線 $y=x^2-3x+(a-3)^2$ の交点の x 座標は，x に関する２次方程式

$$-2ax+a^2+9=x^2-3x+(a-3)^2$$

の解である。この方程式の解は $x=3$ と $x=-2a$ である。a が $0<a<3$ という範囲にあるとき，$a \leqq x < 3$ において，下に凸な放物線の一部である曲線よりも直線である ℓ の方が上にあるので，$S(a)$ は次の定積分によって求められる。

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_a^3 \left\{(-2ax+a^2+9)-(x^2-3x+(a-3)^2)\right\}dx \\
&= -\int_a^3 (x^2+(2a-3)x-6a)\,dx \\
&= -\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{2a-3}{2}x^2-6ax\right]_a^3 \\
&= -\left(9+\frac{9(2a-3)}{2}-18a\right)+\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{a^2(2a-3)}{2}-6a^2\right) \\
&= \frac{1}{6}(8a^3-45a^2+54a+27)
\end{aligned}$$

(3) 前問で求めた $S(a)$ を微分すると，

$$S'(a)=\frac{1}{6}(24a^2-90a+54)=4a^2-15a+9=(a-3)(4a-3)$$

したがって，$S(a)$ の $0<a<3$ における増減表は，以下のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\dfrac{243}{32}$	↘	

よって，$S(a)$ は $a=\dfrac{3}{4}$ のとき，最大値 $\dfrac{243}{32}$ をもつ。

4 [A]

(1) $\vec{a}$の大きさは$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0}=\sqrt{2}$である。したがって，$\vec{a}$と平行なベクトルのうち$x$成分が正のものは

$\vec{b_1}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$である。

(2) $\vec{b_2}=(x,\ y,\ 0)$とおく。条件より$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}=0$かつ$|\vec{b_2}|=1$なので，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y=0$かつ$x^2+y^2=1$である。

この連立方程式を$y>0$という条件の下で解いて，$\vec{b_2}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$を得る。

(3) $\vec{b_3}=(x,\ y,\ z)$（ただし，$z>0$）とおく。条件より$\vec{b_1}\cdot\vec{b_3}=0$，$\vec{b_2}\cdot\vec{b_3}=0$かつ$|\vec{b_3}|=1$なので，

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y=0$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y=0$かつ$x^2+y^2+z^2=1$である。この連立方程式を$z>0$という条件の下で解いて，

$\vec{b_3}=(0,\ 0,\ 1)$を得る。

(4) $\vec{b_i}\cdot\vec{b_i}=1$かつ$\vec{b_i}\cdot\vec{b_j}=0$（$i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ i\neq j$）であるから，内積の性質を用いて計算すると，

$\vec{c}\cdot\vec{d}=-1+2+2=3$，$|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}\cdot\vec{c}}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$，$|\vec{d}|=\sqrt{\vec{d}\cdot\vec{d}}=\sqrt{6}$である。

したがって，$\cos\theta=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$なので，$\theta=60^\circ$である。

4 [B]

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=0$なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-2n}+1}{2^{-2n}+2}=\frac{1}{2}$である。

(2) $|r|>1$のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{-2n}=0$なので$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+1}{r^{2n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{-2n}}{1+2\cdot r^{-2n}}=1$である。

$|r|=1$のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+1}{r^{2n}+2}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$である。

$|r|<1$のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$なので$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+1}{r^{2n}+2}=\frac{1}{2}$である。以上より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+1}{r^{2n}+2}=\begin{cases}1\ (|r|>1),\\ \dfrac{2}{3}\ (|r|=1),\\ \dfrac{1}{2}\ (|r|<1).\end{cases}$$

(3) (2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+1}{2^{2n}+2}=1\neq0$なので，発散する。

数学（３教科型）　　２月10日 実施分

●工学部（生命環境化学科／知能機械工学科）
●情報工学部（情報システム工学科）
●社会環境学部（社会環境学科）

1

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
-1	$-\frac{3}{4}$	$2+\sqrt{2}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	-24	17	63	$-\frac{170}{3}$	3	2

2

①	②	③	④	⑤	⑥
210	15	6	90	120	48

3 ⑴　$f(0)=1$，$f'(0)=-2$より，接線ℓの方程式は，$y=-2x+1$

⑵　前問の接線ℓの傾きが-2なので，それに垂直な直線ℓ'の傾きは$\frac{1}{2}$である。
したがって，ℓ'の方程式は，$y=\frac{1}{2}x+1$である。

⑶　$f(x)$を微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3-10x^2+8x-2 \\ &= 2(2x^3-5x^2+4x-1) \\ &= 2(x-1)(2x^2-3x+1) \\ &= 2(x-1)^2(2x-1) \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f	↘	$\frac{31}{48}$	↗	$\frac{2}{3}$	↗

よって，$f(x)$は極大値をもたず，$x=\frac{1}{2}$ のときに極小値 $\frac{31}{48}$ をもつ。

⑷　$0<x\leqq 1$ において，直線ℓ'の方が曲線$y=f(x)$より上にあるため，問題で指定された部分の面積は，次の定積分によって求められる。

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{2}x+1\right) - \left(x^4-\frac{10}{3}x^3+4x^2-2x+1\right) \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left(-x^4+\frac{10}{3}x^3-4x^2+\frac{5}{2}x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{6}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{11}{20} \end{aligned}$$

4 [A]

(1) 漸化式で $n = 1$ として $a_2 = a_1 + 3$. すなわち，$a_2 = 5$。漸化式で $n = 2$ として $a_3 = a_2 + 3^2$ より，$a_3 = 14$.
よって，漸化式で $n = 3$ として，$a_4 = a_3 + 3^3$ より，$a_4 = 41$。

(2) b_n は初項 3 公比 3 の等比数列なので，初項から第 n 項までの和を S_n とおくと，

$$S_n = \frac{3(3^n-1)}{3-1} = \frac{3(3^n-1)}{2}$$

(3) $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ であるから，$a_n = 2 + \frac{3^n}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3^n}{2} + \frac{1}{2}$。また，これは $n = 1$ のときも成り立つので，
一般項は $a_n = \frac{3^n}{2} + \frac{1}{2}$

4 [B]

(1) $f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

(2) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ を用いて

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(3) $f''(x) = 2\cos 2x$ なので，$f''(x) = 0$ となる x は $2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ より，$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$。
このとき，$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$。また，$f''(x) = 2\cos 2x$ の符号は $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ の前後で変わる。
したがって，変曲点は $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ と $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$。