数学（３教科型）　２月９日 実施分

●工学部（電子情報工学科／電気工学科）
●情報工学部（情報工学科／情報通信工学科／システムマネジメント学科）

1

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
-5	4	-7	$-\frac{29}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{7}$	$-a+6$	$-2b-2$	-11	-6

2

①	②	③	④	⑤	⑥
6	103740	399	130	11	45

3 (1) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき $|t-1| = 1-t$ であり，$1 \leqq t \leqq 3$ のとき $|t-1| = t-1$ であるので，

$$\int_0^3 |t-1|\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt + \int_1^3 (t-1)\,dt = \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^3 = \frac{1}{2}+2 = \frac{5}{2}.$$

(2) $a = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$ とおく。まず，$x \leqq 1$ のとき，$\int_0^x |t-1|\,dt = \int_0^x (1-t)\,dt = x-\frac{x^2}{2}$ に留意すれば，

$$f(x) = x-\frac{x^2}{2}+a \quad (x \leqq 1)$$

となる。そのため，

$$a = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t-\frac{t^2}{2}+a\right)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+at\right]_0^1 = \frac{1}{6}+\frac{a}{2}.$$

よって，$a = \frac{1}{6}+\frac{a}{2}$ により，$a = \frac{1}{3}$．したがって，$f(x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}$ $(x \leqq 1)$．一方，$x > 1$ のときは，

$$\int_0^x |t-1|\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt + \int_1^x (t-1)\,dt = \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^x = \frac{x^2}{2}-x+1$$

によって，$f(x) = \frac{x^2}{2}-x+1+\frac{1}{3} = \frac{x^2}{2}-x+\frac{4}{3}$ $(x > 1)$．以上より，

$$f(x) = \begin{cases} x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3} & (x \leqq 1), \\ \frac{x^2}{2}-x+\frac{4}{3} & (x > 1). \end{cases}$$

(3) (2)より

$$\begin{aligned}
\int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\right)dx + \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{4}{3}\right)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x\right]_1^3 \\
&= \frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

4 [A]

この数列の一般項は，整数 k を用いて

$$a_n=\begin{cases}3k-2 & (n=2k-1)\\ 3k-1 & (n=2k)\end{cases}$$

と表される。

(1) $123=2\times 62-1$ なので，$a_{123}=3\times 62-2=184$ である。

(2) $1357=3\times 453-2$ なので，$a_n=1357$ となる n は，$n=2\times 453-1=905$ である。

(3) m を 2 以上の自然数とすると，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2m-1}a_n&=\sum_{k=1}^{m-1}(a_{2k-1}+a_{2k})+a_{2m-1}\\&=\sum_{k=1}^{m-1}(6k-3)+(3m-2)\\&=6\times\frac{1}{2}m(m-1)-3(m-1)+(3m-2)\\&=3m^2-3m+1.\end{aligned}$$

$m=1$ のとき，求める和は $a_1=1$ であるから，このときも $3m^2-3m+1$ と表される。
よって，求める和は $3m^2-3m+1$ である。

4 [B]

(1) $f'(x)=-\sin^2x+(1+\cos x)\cos x=\cos^2x-\sin^2x+\cos x$ なので，$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(2) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$，$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。一般に，曲線 $y=f(x)$ の点 $(a,\ f(a))$ における法線は，$f'(a)\neq 0$ のとき

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

となる。したがって，$a=\frac{\pi}{4}$ として，$p=-\frac{1}{f'(a)}=-\sqrt{2}$，$q=\frac{a}{f'(a)}+f(a)=\frac{1}{4}(\sqrt{2}\pi+2+2\sqrt{2})$ である。

(3) (1)より $f'(x)=2\cos^2x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)$ なので，$f'(x)=0$ となるのは

$$\cos x=\frac{1}{2}\ \text{または}\ \cos x=-1$$

となるとき，つまり，$x=\frac{\pi}{3}$，π，$\frac{5\pi}{3}$ となるときである。増減表を書くと以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\cdots$	2π
f'	2	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	2
f	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

これより，$x=\frac{\pi}{3}$ で極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=\frac{5\pi}{3}$ で極小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。

数学（３教科型）　２月10日 実施分

●工学部（生命環境化学科／知能機械工学科）
●情報工学部（情報システム工学科）
●社会環境学部（社会環境学科）

1

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
$10(\sqrt{2}-1)$	$27+2\sqrt{2}$	120° （$\frac{2}{3}\pi$も可）	15° （$\frac{\pi}{12}$も可）	20	19.5	280	90720	1	9

2

①	②	③	④	⑤	⑥
23	-1	-6	-1	2	3

3 ⑴　$f(x)$の導関数は$f'(x)=x^2-3$となるので，接線の方程式$y-f(a)=f'(a)(x-a)$より

$$y=(a^2-3)x-\frac{2}{3}a^3+1$$

が求める接線の方程式となる。

⑵　曲線$y=f(x)$上の点$(a,\ f(a))$を接点とする。このとき，⑴よりこの点における接線の方程式は

$y=(a^2-3)x-\frac{2}{3}a^3+1$であり，この接線が点$(1,\ -2)$を通るとすると，

$-2=(a^2-3)-\frac{2}{3}a^3+1$が得られる。これを整理すると，$a^2\left(a-\frac{3}{2}\right)=0$となるから，$a=0,\ \frac{3}{2}$が得られる。

従って，$a=0$のとき接線の方程式は⑴より$y=-3x+1$となり，このとき$f(a)=1$より接点の座標は$(0,\ 1)$となる。一方，$a=\frac{3}{2}$のとき接線の方程式は，$y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$となり，このとき$f(a)=-\frac{19}{8}$より接点の座標は$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{19}{8}\right)$となる。

⑶　関数$f(x)$の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	$1+2\sqrt{3}$	↘	$1-2\sqrt{3}$	↗

ここで，$f(\sqrt{3})=1-2\sqrt{3}$，$f(-\sqrt{3})=1+2\sqrt{3}$を用いた。

したがって，$b=1\pm2\sqrt{3}$のとき，異なる実数解が２個となる。

4 [A]

(1) 以下，記号の簡単のため $\alpha = \angle \mathrm{AOB}$, $\beta = \angle \mathrm{AOC}$ とおく。仮定より，$2\vec{a} + 3\vec{b} = -4\vec{c}$ である。この式の両辺のベクトルの大きさの２乗を考えると，

$$4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 16|\vec{c}|^2$$

を得る。仮定より $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ なので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}$ となる。よって，$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}$ が得られる。

次に $\cos\beta$ を求める。仮定より，$2\vec{a} + 4\vec{c} = -3\vec{b}$ であることに注意し，先程と同様にベクトルの大きさの２乗を考えると，$\cos\beta = \vec{a}\cdot\vec{c} = -\frac{11}{16}$ が導かれる。

(2) $\mathrm{AC}^2 = |\vec{a}-\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = \frac{27}{8}$。最後の等号で，$|\vec{a}|=|\vec{c}|=1$ と(1)で示した $\vec{a}\cdot\vec{c} = -\frac{11}{16}$ を用いた。

$\mathrm{AC}^2 = \frac{27}{8}$ より，$\mathrm{AC} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ である。

(3) $\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{ACB}$ である。また，(2)の結果から $\mathrm{AC} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ となる。ここで，円周角の定理より $\angle\mathrm{ACB} = \frac{\alpha}{2}$ となることに注意すると $\mathrm{AH} = \frac{3\sqrt{6}}{4}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ が導かれる。(1)で求めたように，$\cos\alpha = \frac{1}{4}$ なので，以上により $\mathrm{AH} = \frac{9}{8}$ が得られた。

4 [B]

(1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\cos^2 x}$

(2) (1)より

$$f'(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ において $\cos x$ は正の値をとるので，$f'(x) = 0$ となるのは，$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき。

つまり，$x = \pm\frac{\pi}{4}$ のときである。$f(x)$ の増減表は，以下の通り。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	∞	↘	$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$	↗	$-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$	↘	$-\infty$

以上より $f(x)$ は，$x = -\frac{\pi}{4}$ で極小値 $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ をとり，$x = \frac{\pi}{4}$ で極大値 $-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ をとる。

(3) $f(0) = 0$ および(2)の増減表より，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において常に $f(x) \geqq 0$ である。従って，

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(x - \frac{\tan x}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\log 2}{4}$$

となる。