

- 工学部(電子情報工学科/電気工学科)
●情報工学部(情報工学科/情報通信工学科)

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
$\frac{a-6}{4}$	26	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	5	6	-5	4	0.6990	0.7781

①	②	③	④	⑤	⑥
$\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$	1	90	$45(\sqrt{2}+1)$	$45(\sqrt{2}-1)$	$45(3-\sqrt{2})$

- 3 (1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 3x^2 - 9x)' = (x^3)' - 3(x^2)' - 9(x)' \\ &= 3x^2 - 3 \cdot 2x - 9 \cdot 1 = 3x^2 - 6x - 9 \end{aligned}$$

- (2) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$ より, $f'(x) = 0$ を満たす x の値は $x = -1, 3$ である。また, $f(-1), f(3)$ を計算すると $f(-1) = 5, f(3) = -27$ より, 増減表は次のようになる。

x		-1		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 5	↘	極小 -27	↗

よって, $x = -1$ のとき極大値 5, $x = 3$ のとき極小値 -27 である。

- (3) 与えられた方程式を変形すると

$$x^3 - 3x^2 - 9x = a$$

である。よって, この方程式の実数解の個数は, 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数に一致する。

(2) の増減表を用いて関数 $y = f(x)$ のグラフを描くことで, 次がわかる。

$a < -27$ または $5 < a$ のとき, 共有点の個数は 1 個

$a = -27, 5$ のとき, 共有点の個数は 2 個

$-27 < a < 5$ のとき, 共有点の個数は 3 個

従って, 求める a の値の範囲は $-27 < a < 5$ である。

4 [A]

$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = -\vec{c} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{c} \\ \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = -\vec{c} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \vec{c} + s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB} \\ &= \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c}) = s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c} \end{aligned}$$

- (3) (2) より $\overrightarrow{OQ}$ は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c}$$

と表すことができる。3 点 O, Q, F はこの順に同一直線上にあるので, $\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OF}|} = k$ とおくと,

$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OF}$ が成り立つ。 $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ より,

$$\overrightarrow{OQ} = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$$

である。4 点 O, A, B, C は同一平面上にないから, $\overrightarrow{OQ}$ の $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いた表し方はただ一通りである。よって,

$$\begin{cases} s = k \\ t = k \\ 1-s-t = k \end{cases}$$

が得られる。これを解いて $k = \frac{1}{3}$ である。よって, $\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OF}|} = \frac{1}{3}$ である。

4 [B]

$$(1) \quad f'(x) = (x)' - 2(\cos x)' = 1 - 2(-\sin x) = 1 + 2\sin x$$

$$f''(x) = (1)' + 2(\sin x)' = 2\cos x$$

$$(2) \quad 0 < x < 2\pi \text{ の範囲で方程式 } f''(x) = 2\cos x = 0 \text{ を解くと } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \text{ である。}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } f''(x) > 0, \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{ のとき } f''(x) < 0, \quad \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \text{ のとき } f''(x) > 0 \text{ であるから,}$$

$$\text{関数 } y=f(x) \text{ のグラフは } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ で下に凸, } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{ で上に凸, } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \text{ で下に凸である。}$$

$$\text{よって, 変曲点の } x \text{ 座標は } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \text{ である。また, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi \text{ より,}$$

$$\text{変曲点は } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right) \text{ である。}$$

$$(3) \quad (2) \text{ より } (a, f(a)) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (b, f(b)) = \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right) \text{ であり, 従って, } \ell \text{ の方程式は } y=x \text{ である。}$$

$$\text{ここで, } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ では, } x - f(x) = 2\cos x > 0 \text{ より, 直線 } \ell \text{ は曲線 } y=f(x) \text{ より上側にある。}$$

$$\text{一方, } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{ では, } x - f(x) = 2\cos x < 0 \text{ より, 直線 } \ell \text{ は曲線 } y=f(x) \text{ より下側にある。よって,}$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{x - f(x)\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx = 2$$

$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x) - x\} dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 2\cos x dx = 4$$

$$\text{であり, 従って } S_1 + S_2 = 6 \text{ である。}$$

- 工学部(生命環境化学科／知能機械工学科)
●情報工学部(情報システム工学科／情報マネジメント学科)
●社会環境学部(社会環境学科)

1

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5\sqrt{7}}{14}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3	13	120	210	2	-1

2

①	②	③	④	⑤	⑥
$\frac{1}{4}$	$3-2\sqrt{2}$	2	$\frac{15}{4}$	-1	0

- 3** (1) $f'(x)=3x^2-3(a+3)x+3(a+2)$ より, $f'(1)=3-3(a+3)+3(a+2)=0$
 (2) $f'(x)=3x^2-3(a+3)x+3(a+2)=3(x-1)(x-a-2)$ なので, $f'(x)=0$ のとき, $x=1, a+2$ となる。
 (i) $a \neq -1$ のとき, $x=1$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化するので, $f(x)$ は $x=1$ で極値をとる。
 (ii) $a=-1$ のとき, $f'(x)=3(x-1)^2$ となる。 $f'(1)=0$ であるが, $x \neq 1$ のとき $f'(x)>0$ となるから, $f(x)$ は常に単調に増加する。よって極値をとらない。
 (i), (ii) より, $a=-1$ である。
 (3) $a=-1$ のとき, $f(x)=x^3-3x^2+3x+1=(x-1)^3+2$ となり, 曲線 $y=f(x)$ は $y=x^3$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 平行移動したものとなる。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x+1$ の交点の x 座標を求めると,
 $x^3-3x^2+3x+1=x+1$ より, $x(x-1)(x-2)=0$ となり, $x=0, 1, 2$ である。 $0 \leq x \leq 1$ のとき $f(x) \geq x+1$ であり, $1 \leq x \leq 2$ のとき $f(x) \leq x+1$ であることに注意すると, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (f(x)-(x+1))dx + \int_1^2 (x+1-f(x))dx \\ &= \int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx + \int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 [A]

- (1) $a_n=9+d(n-1)$ であることに注意すると, $a_1+a_2+a_3<2025$ より $27+3d<2025$ となり, $d<666$ となる。よって, これを満たす最大の自然数 d は 665 である。数列 $\{a_n\}$ は初項 9, 公差 665 の等差数列であるので, 一般項は $a_n=9+665(n-1)=665n-656$ と表される。
 (2) 等差数列の和の公式より初項から第 30 項までの和 S_{30} は $S_{30}=\frac{30}{2}(18+29d)=15(18+29d)$ となる。 $S_{30}<2025$ より, $d<\frac{117}{29}$ となり, これを満たす最大の自然数 d は 4 である。数列 $\{a_n\}$ は初項 9, 公差 4 の等差数列であるので, 一般項は $a_n=9+4(n-1)=4n+5$ と表される。
 (3) b_n は次のように変形されることに注意する。

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}}$$

- (2)より数列 $\{a_n\}$ は公差 4 の等差数列であったから, 任意の自然数 n に対して $a_n - a_{n+1} = -4$ である。よって

$$b_n = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{4}$$

となる。この数列の第 n 項までの和 S は以下のようになる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + \cdots + (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})\} \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}) \\ &= \frac{\sqrt{4n+9} - 3}{4} \end{aligned}$$

4 [B]

(1) 求める面積は

$$S = \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\log |x|]_1^e = 1$$

(2) それぞれの面積は

$$S_1(a) = \int_1^a \frac{1}{x} dx = [\log |x|]_1^a = \log a$$

$$S_2(a) = \int_1^a \log x dx = [x \log x]_1^a - \int_1^a dx = a \log a - a + 1$$

となる。よって、 $\log a = a \log a - a + 1$ となり、整理すると $(a-1)(\log a - 1) = 0$ となる。 $a > 1$ であることに注意すると、 $\log a = 1$ すなわち $a = e$ となる。

(3) 回転体の体積 $V(a)$ は

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_1^a (\log x)^2 dx \\ &= \pi [x(\log x)^2]_1^a - \pi \int_1^a 2 \log x dx \\ &= \pi a(\log a)^2 - 2\pi \int_1^a \log x dx \end{aligned}$$

となる。ここで、(2)の $S_2(a)$ の計算結果より、

$$V(a) = \pi a(\log a)^2 - 2\pi a \log a + 2\pi a - 2\pi$$

となる。よって、求める a について $\pi a(\log a)^2 - 2\pi a \log a + 2\pi a - 2\pi = 2\pi a - 2\pi$ となり、整理すると $\pi a(\log a)(\log a - 2) = 0$ となる。 $a > 1$ であることに注意すると、 $\log a = 2$ すなわち $a = e^2$ となる。