数学（一般選抜 3教科型選抜） 2月9日実施分

●工学部（電子情報工学科／電気工学科）
●情報工学部（情報工学科／情報通信工学科）

1

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
$2\sqrt{2}$	6	$-4a^2+5$	$-8a+9$	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{44}{125}$	31	6

2

①	②	③	④	⑤	⑥
1.0791	22	−0.3010	7	25	13

3 (1) $f'(x)=6(x^2)'+2(x)'+(8)'=6\cdot 2x+2\cdot 1+0=12x+2$ である。

また，$F'(x)=f(x)=6x^2+2x+8$ より

$$F(x)=\int(6x^2+2x+8)dx=2x^3+x^2+8x+C$$

となる。ここで C は積分定数である。$F(2)=35$ から，$C=-1$ を得る。

よって，$F(x)=2x^3+x^2+8x-1$ である。

(2) $P(x)=F(x)-f'(x)$ とおく。このとき，$f'(x)=12x+2$ より，

$$P(x)=(2x^3+x^2+8x-1)-(12x+2)=2x^3+x^2-4x-3$$

である。ここで，$P(-1)=0$ であるから，因数定理より $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる。実際に割り算を行うことで，$P(x)=(x+1)(2x^2-x-3)=(x+1)^2(2x-3)$ が得られる。よって，等式 $P(x)=0$ すなわち $F(x)-f'(x)=0$ を満たす x の値は $x=-1,\ \frac{3}{2}$ である。また，$x=-1$ が $P(x)=0$ の重解であり，$F(-1)=f'(-1)=-10$ となるから，求める接点の座標は $(-1,\ -10)$ である。

(3) (2)より，曲線 $y=F(x)$ と直線 $y=f'(x)$ は点 $(-1,\ -10)$ で接している。また，$x=\frac{3}{2}$ のとき，

$F\left(\frac{3}{2}\right)=f'\left(\frac{3}{2}\right)=20$ であり，したがって曲線 $y=F(x)$ と直線 $y=f'(x)$ は点 $\left(\frac{3}{2},\ 20\right)$ で交わる。

$-1\leqq x\leqq\frac{3}{2}$ の範囲において

$$F(x)-f'(x)=(x+1)^2(2x-3)\leqq 0$$

であるから，この範囲で常に $F(x)\leqq f'(x)$ である。よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(f'(x)-F(x))dx=-\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(2x^3+x^2-4x-3)dx$$

$$=-\left[\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-2x^2-3x\right]_{-1}^{\frac{3}{2}}=-\left(-\frac{171}{32}-\frac{7}{6}\right)=\frac{625}{96}$$

である。

4 ［A］

(1) $\{a_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列なので，$a_n=1+3(n-1)=3n-2$ である。

(2) $b_n=2+d(n-1)=dn+(2-d)$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3n-2)\cdot(-2)+\{dn+(2-d)\}\cdot 1=(-6+d)n+(6-d)$$

となる。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するための必要十分条件は $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ であり，したがって，すべての自然数 n について $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するのは $-6+d=6-d=0$，すなわち $d=6$ のときである。

(3) (2)より $b_n=2+6(n-1)=6n-4$ である。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}_k}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(3(k-1),\ 6(k-1))=(k-1)(3,\ 6)$$

であるから，

$$\frac{1}{2025}\sum_{k=1}^{2026}|\overrightarrow{\mathrm{QP}_k}|=\frac{1}{2025}\sum_{k=1}^{2026}|(k-1)(3,\ 6)|=\frac{1}{2025}\sum_{k=1}^{2026}(k-1)|(3,\ 6)|$$

である。ここで，$k=1$ のとき $(k-1)|(3,6)|=0$ であるから，

$$\frac{1}{2025}\sum_{k=1}^{2026}(k-1)|(3,\ 6)|=\frac{1}{2025}\sum_{k=2}^{2026}(k-1)|(3,\ 6)|=\frac{1}{2025}\sum_{k=1}^{2025}k|(3,\ 6)|$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{2025}\sum_{k=1}^{2025}k=\frac{3\sqrt{5}}{2025}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2025\cdot(2025+1)=3039\sqrt{5}$$

となる。

4 ［B］

(1) $f'(x)=\dfrac{(e^x)'+(e^{-x})'}{2}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ である。

(2) $g(x)=e^x$ とおくと，$\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ であり，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能であるので，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=e^0=1$$

となる。

また，(1)の結果から，

$$\frac{f'(x)}{x}=\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}-1}{xe^x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{e^x+1}{e^x}$$

である。ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ であり，また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^x+1)=e^0+1=2$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}e^x=e^0=1\neq 0$より，

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x}=\frac{2}{1}=2$ となるので，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$ である。

(3) (1)の結果を踏まえると，

$$\begin{aligned}L(t)&=\int_0^t\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_0^t\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx\\&=\int_0^t\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx=\int_0^t\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx\\&=\int_0^t\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\end{aligned}$$

となる。

●工学部（生命環境化学科／知能機械工学科）
●情報工学部（情報システム工学科／情報マネジメント学科）
●社会環境学部（社会環境学科）

1

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
$-1<x<\frac{11}{3}$	3	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{5}$	$2a$	$(\sqrt{2}-1)a$	$-3m+16$	$\frac{12}{13}$

⑨	⑩
$x<\frac{5}{2}$	$0<x<128$

2

①	②	③	④	⑤	⑥
120	6	60	20	36	96

3 (1) $f(x)$ を微分すると $f'(x)=2x+a$ である。$f'(1)=2+a=2$ より，$a=0$ である。また，$f(1)=1+a+b=-5$ より $b=-6$ である。

(2) $g(x)=-x^2-\frac{1}{5}bc=-x^2+\frac{6}{5}c$ より，

$$\int_a^1 g(t)dt=\int_0^1\left(-t^2+\frac{6}{5}c\right)dt=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{6}{5}ct\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{6}{5}c$$

である。$-\frac{1}{3}+\frac{6}{5}c=c$ であるから，$c=\frac{5}{3}$ である。

(3) $a=0$，$b=-6$，$c=\frac{5}{3}$ より，$f(x)=x^2-6$，$g(x)=-x^2+2$ である。

2つの放物線の交点の x 座標を求めると，$x^2-6=-x^2+2$ より $x=\pm 2$ である。

$-2\leqq x\leqq 2$ の範囲で常に $f(x)\leqq g(x)$ なので，

$$S=\int_{-2}^{2}\{g(x)-f(x)\}dx=-2\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)dx$$
$$=-2\cdot\left[-\frac{1}{6}\{2-(-2)\}^3\right]=\frac{64}{3}$$

となる。

4 ［A］

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\cdot 5\cdot\frac{3}{5}=9$

(2) $\mathrm{AP}:\mathrm{DP}=s:1-s$，$\mathrm{BP}:\mathrm{CP}=t:1-t$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{b}$

および $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{t}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ となる。よって，

$$\begin{cases}1-s=\frac{t}{3}\\ \frac{s}{4}=1-t\end{cases}$$

これを解くと $s=\frac{8}{11}$，$t=\frac{9}{11}$ となる。よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{11}\vec{a}+\frac{2}{11}\vec{b}$ となる。

(3) $\mathrm{AH}:\mathrm{BH}=r:1-r$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-r)\vec{a}+r\vec{b}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(-r+\frac{8}{11}\right)\vec{a}+\left(r-\frac{2}{11}\right)\vec{b}$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\Leftrightarrow\left\{\left(-r+\frac{8}{11}\right)\vec{a}+\left(r-\frac{2}{11}\right)\vec{b}\right\}\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=0\Leftrightarrow$

$\left(r-\frac{8}{11}\right)|\vec{a}|^2+\left(-2r+\frac{10}{11}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(r-\frac{2}{11}\right)|\vec{b}|^2=0\Leftrightarrow r=\frac{2}{11}$ がわかる。

よって，$\mathrm{AH}:\mathrm{BH}=2:9$ となる。また，$\sin\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOB}}=\frac{4}{5}$ より，

$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{4}{5}=6$ となる。よって，$\triangle\mathrm{OAH}$ の面積は $6\cdot\frac{2}{11}=\frac{12}{11}$ となる。

4 [B]

(1) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot x-(x^2+1)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

(2) $f'(x)=0$ のとき，$x=1,\ -1$ である。増減表を書くと，

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘	／	↘	2	↗

よって，$x=1$ のときに極小値 2 をとる。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-\dfrac{5}{2}$ の交点の x 座標は，$\dfrac{x^2+1}{x}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0\Leftrightarrow(2x+1)(x+2)=0$ より，

$x=-2,\ -\dfrac{1}{2}$ となる。求める図形の面積は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2+1}{x}+\frac{5}{2}\right)dx=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2+\log|x|+\frac{5}{2}x\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{15}{8}-2\log 2\end{aligned}$$